الأربعاء 2018/4/25 م — المحاضرة الحادية عشر

الخاصية تقريباً في كل مكان :

تعريف :

لتكن P خاصية ، بالنسبة معرفة على مجموعة متقيسة E عندئذٍ نقول أن الخاصية P محققة تقريباً في كل مكان على مجموعة E إذا تحقق ما يلي :

(1) توجد مجموعة جزئية E_0 من E متقيسة وقياسها صفر $\mu(E_0)=0$

(2) الخاصية P محققة على المجموعة E/E_0 وغير محققة على E_0

ونكتب $P(\mu.a.e)$ أو $P^{a.e}$

ملاحظة :

(P) الخاصية P المذكورة بالتعريف قد تكون : استمرار دالة قابلية الاشتقاق ، المحدودية ، تقارب متتالية ...

(ب) قد تكون $E_0=\phi$ وفي هذه الحالة نقول أن الخاصية P محققة في كل مكان على E ، نرمز : (a.e تقريباً بكل مكان)

أمثلة :

مثال 1 :

لتكن الدالة $f: R \to R$ المعرفة بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x\in N \\ x & ; x\in R\setminus N \end{cases}$$

هل هذه الدالة مستمرة أو مستمرة تقريباً في كل مكان على R ؟

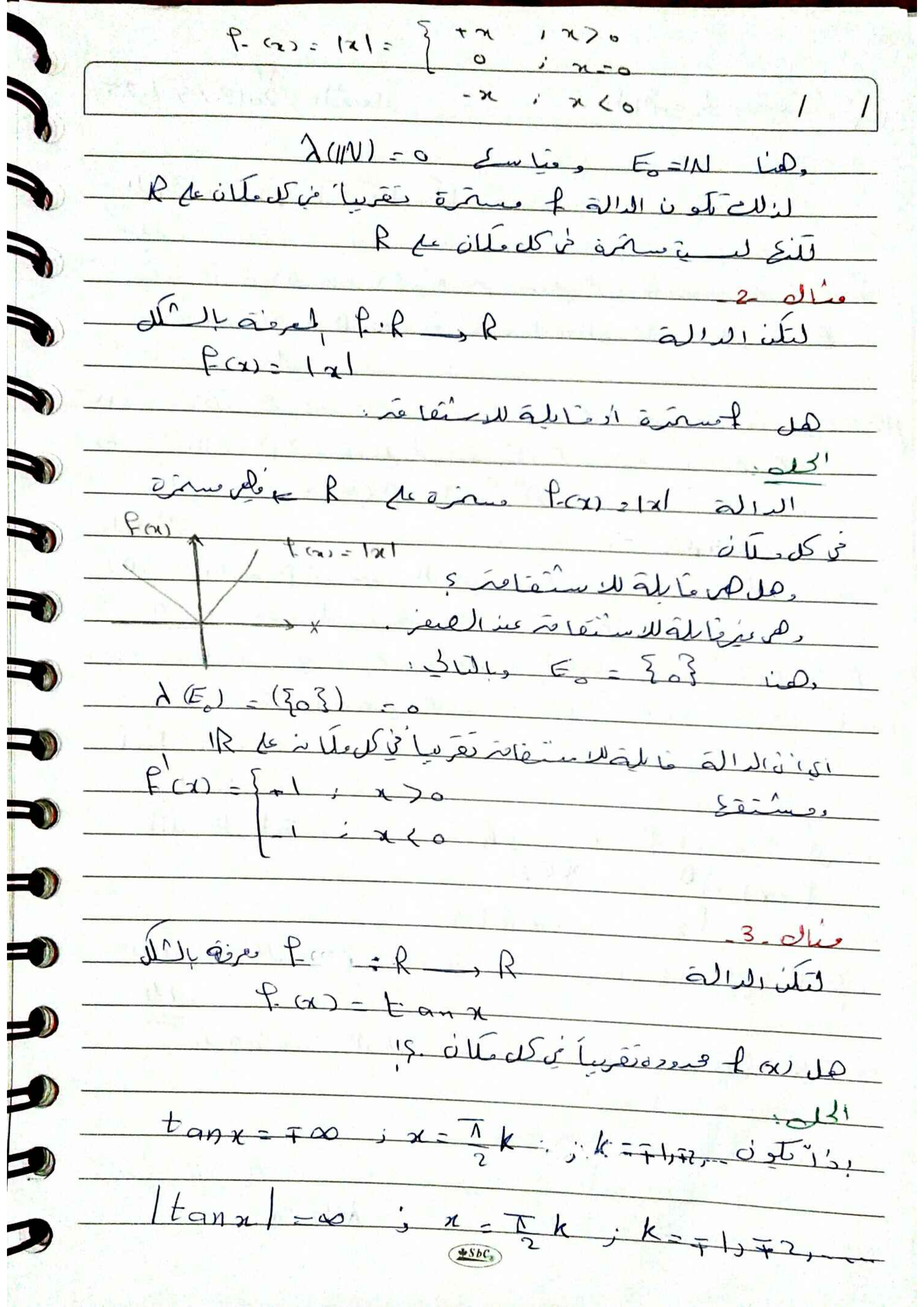
الحل :

نلاحظ أن الدالة f غير مستمرة في كل نقطة $x\in N$

$f(x)$; $f(x)=x$; x ; -3 -2 -1 1 2 3

وهنا $E_0=N$

وقياسها $\lambda(N)=0$



$$f(x)=|x|=\begin{cases} +x & ; x>0\\ 0 & ; x=0\\ -x & ; x<0\end{cases}$$ / /

وهنا $E_0 = \mathbb{N}$ وقياسه $\lambda(\mathbb{N})=0$

لذلك تكون الدالة f مستمرة تقريباً في كل مكان على R

لكنها ليست مستمرة في كل مكان على R

مثال -2-

لتكن الدالة $f: R \to R$ المعرفة بالشكل

$f(x)=|x|$

هل f مستمرة او قابلة للاشتقاق:

الحل:

الدالة $f(x)=|x|$ مستمرة على R ⇐ فهي مستمرة في كل مكان

وهل هي قابلة للاشتقاق؟

وهي غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

وهنا $E_0=\{0\}$ وبالتالي:

$\lambda(E_0) = (\{0\}) = 0$

اي ان الدالة قابلة للاشتقاق تقريباً في كل مكان على $\mathbb{R}$

ومشتقتها

$$f'(x)=\begin{cases}+1 & ; x>0\\ -1 & ; x<0\end{cases}$$

مثال -3-

لتكن الدالة $f: R\to R$ معرفة بالشكل

$f(x)=\tan x$

هل $f(x)$ محدودة تقريباً في كل مكان ؟

الحل:

بدأً تكون $\tan x = \mp\infty \; ; \; x=\frac{\pi}{2}k \; ; \; k=\mp1,\mp2,\ldots$

$|\tan x| = \infty \; ; \; x=\frac{\pi}{2}k \; ; \; k=\mp1,\mp2,\ldots$

أي أن الدالة $f(x)$ غير محدودة في هذه النقاط لكنها محدودة في بقية نقاط R أي:

$$|f(x)| = |\tan x| < +\infty \; ; \; x \in R \setminus \{\frac{\pi}{2}k , k = \mp1, \mp2, ...\}$$

وعلى كمجموعة معدودة ← قياس لبيك ← قياس لبيك = 0

بعبارة

$$\lambda(\underbrace{\{\frac{\pi}{3}k ; k = \mp1, \mp2, ...\}}_{E_0}) = 0$$

فإن الدالة f محدودة تقريباً في كل مكان على R (وليست محدودة في كل مكان) ←

$$|f(x)| \overset{a.e}{<} \infty$$

$<$ = $\overline{\bar{\mathcal{F}}}$ الدالة (تقريباً في كل مكان)

مثال 4

دالة ديرخلية $\varphi : [0,1] \to R$ المعرفة بالشكل

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in [0,1] \cap Q \\ 0 & ; x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$$

إن $0 \overset{a.e}{=} \varphi$ حيث:

$$E_0 = \{x \in [0,1] : \varphi(x) \neq 0\}$$
$$= \{x \in [0,1] : \varphi(x) = 1\} = [0,1] \cap Q$$

$$\lambda(E_0) = \lambda([0,1] \cap Q) = 0$$

$$|\varphi(x)| \leq 2 < \infty$$ وهذه الدالة محدودة في كل مكان

مثال 5

لتكن $\{f_n(x)\}$ متتالية دوال معرفة بالشكل على المجال $[0,1]$

$$f_n(x) = x^n \; ; \; x \in [0,1]$$
$$n = 1, 2,$$

(1) أوجد $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$

(2) ماذا تلاحظ؟!

الحل: 1]

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \end{cases}$$

2] نلاحظ أن المتتالية $f_n(x) = x^n$ متقاربة تقريباً في كل مكان على المجال $[0,1]$ من الدالة $f(x) = 0$

أي أن:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{a.e}{=} 0$$

لأن:

$$E_0 = \{x \in [0,1] : \lim f_n(x) \neq 0\} = \{1\}$$

$$\Rightarrow \lambda(E_0) = \lambda(\{1\}) = 0$$

و

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \quad ; \quad x \in [0,1[$$

$$; x \in [0,1] \setminus \{1\}$$

مثال 6

لتكن المتتالية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على R بالشكل:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & ; x \in R \setminus Z \\ \frac{1}{1+x^{2n}} & ; x \in Z \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n =$

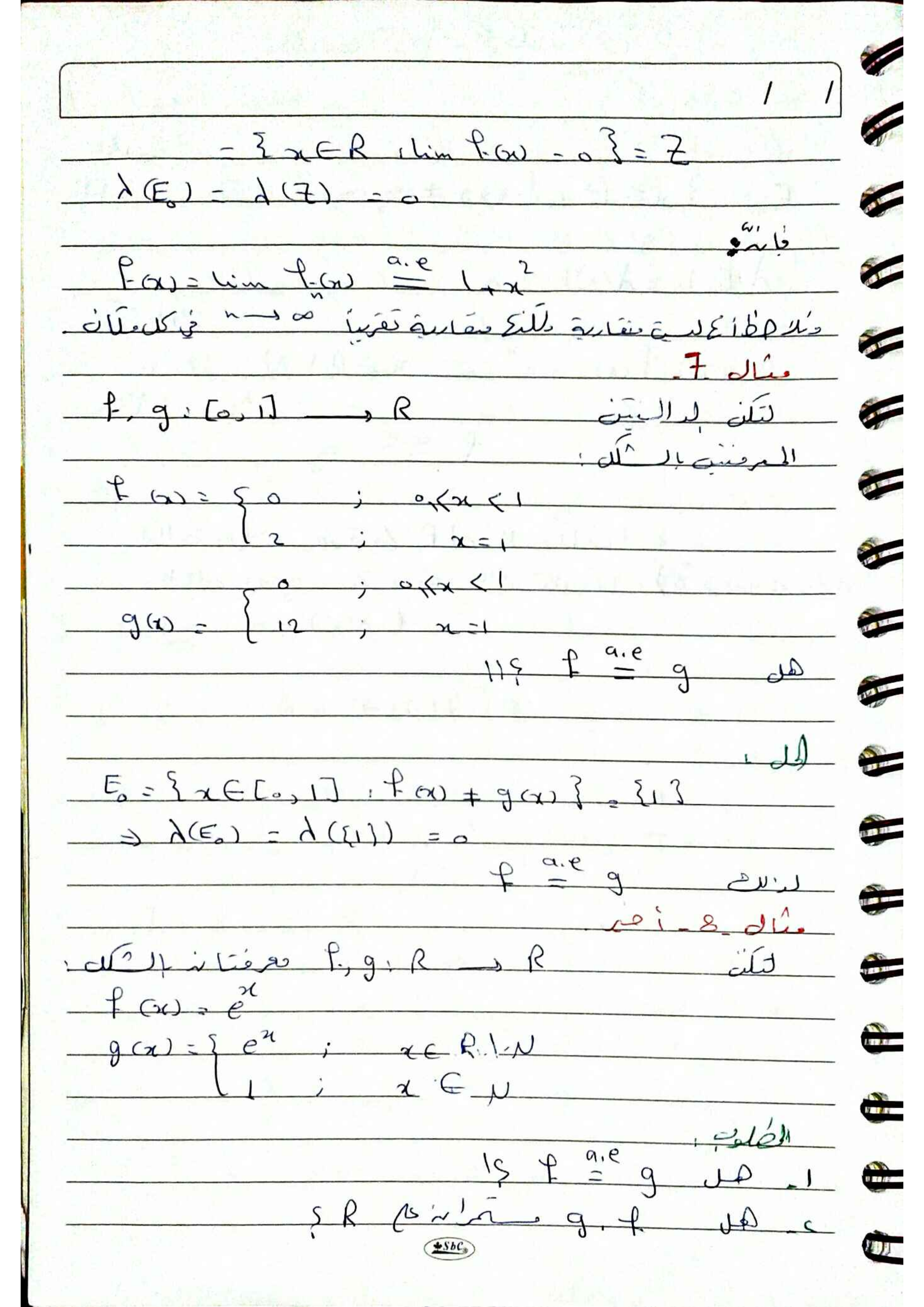
اوجد $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ ماذا تلاحظ؟

الحل:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , x \in R \setminus Z \\ 0 & ; x \in Z \end{cases}$$

وبالتالي

$$E_0 = \{x \in R : \lim_{n \to \infty} f_n(x) \neq 1 + x^2\}$$



$= \{x \in R : \lim f_n(x) = 0\} = Z$

$\lambda(E_0) = \lambda(Z) = 0$

فائدة:

$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \overset{a.e}{=} 1 + x^2$

ولاحظ أنها ليست متقاربة لكنها متقاربة تقريباً في كل مكان.

مثال 7:

لتكن الدالتين $f, g : [0,1] \to R$ المعرفتين بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 12 & ; x = 1 \end{cases}$$

هل $f \overset{a.e}{=} g$ ؟؟

الحل:

$E_0 = \{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\} = \{1\}$

$\Rightarrow \lambda(E_0) = \lambda(\{1\}) = 0$

لذلك $f \overset{a.e}{=} g$

مثال 8 - أمر

لتكن $f, g : R \to R$ معرفتان بالشكل:

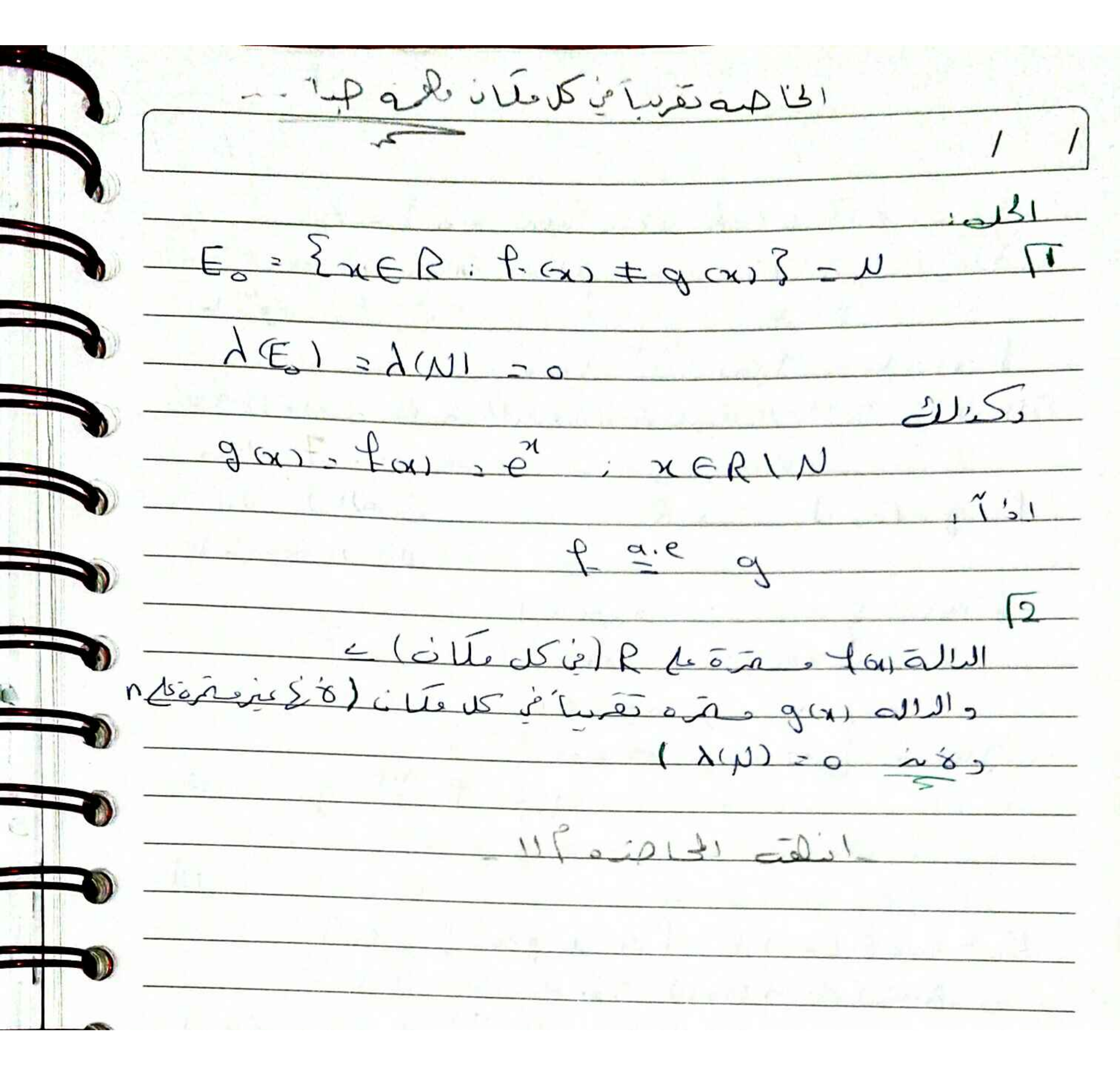
$f(x) = e^x$

$$g(x) = \begin{cases} e^x & ; x \in R \setminus N \\ 1 & ; x \in N \end{cases}$$

المطلوب:

1- هل $f \overset{a.e}{=} g$ ؟

2- هل g, f مستمرتان على R ؟



الخاصه تقريباً في كل مكان تكمله ...

الحل:

1]

$$E_0 = \{x \in R : f(x) \neq g(x)\} = N$$

$$\lambda(E_0) = \lambda(N) = 0$$

وكذلك

$$g(x) = f(x) = e^x \quad ; \quad x \in R \setminus N$$

اذاً

$$f \overset{a.e}{=} g$$

2]

الدالة $f(x)$ مستمرة على R (في كل مكان) ،

والدالة $g(x)$ مستمرة تقريباً في كل مكان (لأنها غير مستمرة على N

ولأن $\lambda(N) = 0$)

انتهت الخاصة ؟!!